УТВЕРЖДАЮ

Ректор
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе» (МГРИ-РГГРУ)
д.э.н., профессор

_______________ В.И. Лисов

«08» февраля 2017 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Киселева Евгения Александровича «Интерполяция и построение биортогональных систем для неполных неортогональных семейств функций» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Актуальность темы диссертации связана с тем фактом, что неортогональные системы функций в настоящее время активно применяются для обработки сигналов, поскольку обладают большей гибкостью и простотой по сравнению со многими ортогональными системами. Изучаемые в диссертации неортогональные семейства функций являются неполными системами Рисса в $L_2(\mathbb{R})$. При разработке соответствующих вычислительных алгоритмов центральным является вопрос о способе восстановления данного сигнала по имеющейся о нем информации. Для решения этой задачи в соответствии с темой диссертации автор использует интерполяционный метод и метод построения биортогональных систем.

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задана система Рисса $\mathcal{G} = \{g_m : m \in \mathbb{Z}\}$ с нижней границей A и верхней границей B. Если система $\mathcal{G}$

полна в $\mathcal{H}$, то она является фреймом с константами A и B, т. е. для любого элемента $f \in \mathcal{H}$ выполнены неравенства

$$A\,||\,f\,||^2 \le \sum_m \left|\left\langle f, g_m \right\rangle\right|^2 \le B\,||\,f\,||^2,$$

и существует алгоритм восстановления f, сходящийся экспоненциально (скорость сходимости тем выше, чем ближе отношение B/A к 1). В частности, если $A=B$ и система $\mathcal{G}$ полна в $\mathcal{H}$, то для любого $f \in \mathcal{H}$ имеет место следующее обобщение разложения в ряд Фурье:

$$f = A^{-1} \sum_m \left\langle f, g_m \right\rangle g_m \,. \tag{1}$$

В случае $A<B$ восстановление f по значениям $\langle f, g_m \rangle$ осуществляется с помощью двойственного фрейма $\{\,\tilde{g}_m\,\}$:

$$f = \sum_m \left\langle f, g_m \right\rangle \tilde{g}_m \,. \tag{2}$$

Хорошо известно, что отношение констант Рисса характеризует устойчивость многих вычислительных алгоритмов. Отметим также, что если система $\mathcal{G}$ неполна, то формулы (1) и (2) применимы не ко всем элементам пространства $\mathcal{H}$, а только к элементам замкнутой линейной оболочки системы $\mathcal{G}$.

Первая глава диссертации содержит обзор некоторых методов и математических моделей, в которых используются неортогональные системы функций. Основное внимание уделено случаю, когда аппроксимирующие элементы представляют собой целочисленные сдвиги одной функции, а восстановление произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ осуществляется интерполяционным или биортогональным методом. Оба подхода (интерполяционный и биортогональный) для системы целочисленных сдвигов функции Гаусса $\varphi_G(x,\sigma) := exp(-x^2/(2\sigma^2))$ были реализованы в работе:

Maz'ya V. *Approximate approximations* / V. Maz'ya, G. Schmidt. – AMS Mathematical Surveys and Monographs, V. 141. 2007.

Первые две теоремы главы 2 (теоремы 2.1 и 2.2) представляют собой аналоги этих результатов для целочисленных сдвигов функции Лоренца $\varphi_L(x,\sigma) := \sigma^2/(\sigma^2 + x^2)$.

Для произвольной функции $g \in L_2(\mathbb{R})$ положим $V(g) := \{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Предположим, что функции $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{R})$ удовлетворяют соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-k)\psi^*(x)dx = \delta_{k0}, k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда пара $V(\varphi)$, $V(\psi)$ образует биортогональную систему в $L_2(\mathbb{R})$, функция φ называется базовой функцией, а ψ – базовой дуальной функцией. Пусть $\mathbb{H}_\varphi$ – замыкание в $L_2(\mathbb{R})$ линейной оболочки системы $V(\varphi)$. Если дуальная функция ψ не принадлежит подпространству $\mathbb{H}_\varphi$, то она называется внешней дуальной функцией для базовой функции φ. Внешние дуальные функции для базовых функций $\varphi_G(\cdot,\sigma)$ и $\varphi_L(\cdot,\sigma)$ приведены в теоремах 2.3 и 2.4.

Для систем целочисленных сдвигов функции Гаусса константы Рисса были вычислены М.В. Журавлевым в 2011 г. В теореме 2.5 диссертации указаны явные выражения констант Рисса для целых сдвигов функции $\varphi_L(\cdot,\sigma)$. Как и в случае функции Гаусса, отношение констант Рисса $B_L(\sigma)/A_L(\sigma)$ неограниченно возрастает с увеличением параметра σ. Значения констант Рисса соответствующие нескольким значениям параметра $\sigma \leq 5$ приведены в таблице 2.2.

Л.А. Минин, М.В. Журавлев и С.М. Ситник в 2014 г. показали, что отношение констант Рисса системы сдвигов узловой функции, порожденной функцией Гаусса, имеет при $\sigma \to \infty$ предел, равный 2. Согласно теореме 2.6 аналогичный результат верен для функции Лоренца:

$$\lim_{\sigma\to\infty} \widetilde{A}_L(\sigma) = \frac{1}{2}, \ \lim_{\sigma\to\infty} \widetilde{B}_L(\sigma) = 1 .$$

Теорема 2.7 утверждает, что

$$\lim_{\sigma\to\infty} \widetilde{\varphi}_L(\sigma) = sinc(\pi x)$$

со сходимостью в $L_2(\mathbb{R})$. Аналогичный результат для функции Гаусса ранее доказали Т. Шрюмпрехт и Н. Сивакумар (T. Schlumprecht, N. Sivakumar, 2009).

Третья глава диссертации посвящена анализу вычислительных особенностей процедуры разложения по системам сдвигов функций Гаусса и Лоренца, а также некоторых их модификаций. Преимущественно внимание уделяется функции Лоренца, поскольку случай функции Гаусса детально изучен другими авторами.

С помощью квадратурных формул вычислены коэффициенты $d_{L,k}(\sigma)$, проведена численная проверка теоремы 2.7. Выполнен ряд вычислительных экспериментов с тестовыми функциями по оценке эффективности анализа и синтеза функций с помощью интерполяционного метода и биортогональных систем, построенных во второй главе.

Установлено, что в отсутствие шума интерполяционный алгоритм обеспечивает хорошее качество восстановления вплоть до $\sigma = 7$: визуально исходная и восстановленная функции неразличимы, погрешность в среднем не превышает 0.01% от максимального значения исходной функции. При $\sigma >$

7 алгоритм работает неустойчиво. Как показали вычисления, для нахождения амплитуд и положений пиков алгоритм, однако, оказывается малопригодным, поскольку не позволяет обнаруживать пики, которые расположены не в узлах сетки.

Эксперименты с добавлением случайного шума показали, что алгоритм продолжает работать стабильно (погрешность при восстановлении не более 1%), составляет 10 % относительно амплитуды исходной функциональной зависимости. Алгоритм биортогональных систем обеспечивает хорошее качество восстановления в отсутствие шума при $\sigma < 5$, т.е. в этой ситуации несколько уступает алгоритму интерполяции. Однако, при добавлении 10 %-го случайного шума, граница $\sigma = 5$ не понижается. Таким образом, данный алгоритм менее чувствителен к случайному шуму, чем интерполяционный.

Далее в качестве еще одной иллюстрации эффективности предложенного во второй главе способа построения биортогональных систем в некоторых простейших случаях рассчитаны базовые дуальные функции для функций Гаусса и Лоренца разной ширины σ, но с общим центром в начале координат.

Показано, что системой Рисса является семейство целочисленных сдвигов, порожденное сверткой функций Гаусса и Лоренца и зависящее от двух параметров σ или s (в теории атомных спектров эту свертку называют контуром Фойгта). Дана оценка констант Рисса и показано, что при больших значениях параметров σ или s матрица Грама исследуемой системы сдвигов становится плохо обусловленной (отношение констант B/A быстро увеличивается). Базовая дуальная функция $\psi(x, \sigma, s)$ для равномерных сдвигов контура Фойгта представима в виде линейной комбинации сдвигов $\varphi(x - k, \sigma, s)$ с некоторыми коэффициентами $\psi_k(\sigma, s)$. Автором выявлены полезные для вычислительной практики особенности в поведении этих коэффициентов и показано (теорема 3.1), что коэффициенты $d_k(\sigma, s)$ узловой функции совпадают со значениями $\psi_k(\sigma/\sqrt{2}, s/2)$.

В заключительной четвертой главе рассматриваются системы функций вида

$$\varphi_{km}(x) = exp\left(-\frac{(x-\omega_1 k)^2}{2} + i\omega_2 mx\right), \quad k, m \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

называемые когерентными состояниями гармонического осциллятора. Эти системы функций имеют важное значение в квантовой и статистической физике. Известно, что при $\omega_1\omega_2 < 2\pi$ подсистемы когерентных состояний (3) образуют фреймы для $L_2(\mathbb{R})$, а при $\omega_1\omega_2 > 2\pi$ получаются неполные подсистемы. В случае $\omega_1\omega_2 = 2\pi$ система (3) полна и она остается полной при отбрасывании любой одной функции, но становится неполной при отбрасывании любых двух функций.

В диссертации подсистемы когерентных состояний (3) исследуются при $\omega_1\omega_2 \geq 2\pi$ с точки зрения возможности их устойчивой ортогонализации или построения биортогональной системы. Из теоремы 4.1 следует, что нижняя константа Рисса системы когерентных состояний (3) при $\omega_1\omega_2 = 2\pi$ равна нулю, причем даже после отбрасывания одной любой функции. Следовательно, в этом случае устойчивая процедура ортогонализация для рассматриваемой системы оказывается невозможной. Если же произведение $\omega_1\omega_2$ кратно 4π, то по теореме 4.2 константы Рисса семейства (3) выражаются через третью тета-функцию Якоби $\theta_3(x,q)$ по формулам

$$A = \sqrt{\pi}\theta_3\left(\frac{\pi}{2}, exp\left(-\frac{\omega_1^2}{4}\right)\right)\cdot\theta_3\left(\frac{\pi}{2}, exp\left(-\frac{\omega_2^2}{4}\right)\right),$$

$$B = \sqrt{\pi}\theta_3\left(0, exp\left(-\frac{\omega_1^2}{4}\right)\right)\cdot\theta_3\left(0, exp\left(-\frac{\omega_2^2}{4}\right)\right).$$

Известно, что функция $\theta_3(x,q)$ на вещественной оси конечна и не обращается в нуль. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае система (3) является системой Рисса и для нее возможна устойчивая процедура ортогонализации. В § 4.5 обсуждается возможность применения этого результата для анализа хаотической динамики в квантовых системах низкой размерности.

Таким образом, в диссертационной работе Е. А. Киселева изучаются неортогональные семейства сдвигов, когерентных состояний и эффективные методы разложения функций в ряды по этим системам. Основные результаты связаны с решением следующих задач:

1. Построение узловой функции на основе равномерных сдвигов функции Лоренца.

2. Построение новых биортогональных систем для сдвигов функций Гаусса и Лоренца.

3. Разработка и анализ эффективности алгоритмов разложения по рассматриваемым системам.

4. Анализ устойчивости разложения по исследуемым системам, оценка возможностей применения разработанных алгоритмов.

Все утверждения и теоремы, научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в диссертации, а также полученные автором формулы, полностью обоснованы. Полученные в диссертации результаты достоверны, являются новыми и существенно дополняют исследования Л.А. Минина, М.. Журавлева, С.М. Ситника, Т. Шлюмпрехта (T. Schlumprecht), Н. Сивакумара (N. Sivakumar) и др. авторов.

Достоинствами диссертации являются не только приведенные выше результаты автора о неортогональных системах функций, но и ряд практических рекомендаций по использованию этих результатов для решения задач обработки сигналов и в хаотической динамике.

В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако в них имеется несколько пробелов и неточностей. Вот некоторые из них:

1. При изложении процесса ортогонализации в § 1.2 было бы полезно упомянуть о модифицированных алгоритмах Грама-Шмидта.

2. Во введении или в комментариях к теореме 2.7 можно было бы привести формулу Котельникова-Шеннона:

$$f(t)=\sum_{k\in Z} f(k)sinc(\pi(t-k)),$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$, $supp\ \hat{f} \subset [-\pi,\pi]$.

3. Недостаточно подробным в диссертации является доказательство теоремы 4.2. Следовало бы более детально описать процесс получения констант Рисса из найденного выражения для матрицы Грама.

4. Имеется незначительное количество грамматических и стилистических ошибок.

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку работы.

Автореферат соответствует требованиям ВАК Министерства образования и науки РФ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, в числе которых 5 статей в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ. Результаты имеют существенное значение для развития современной теории функций и функционального анализа и могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, в Московском, Санкт-Петербургском, Воронежском, Новосибирском и других институтах и университетах.

Диссертация Киселева Евгения Александровича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории функций и ее применений, что соответствует требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук профессором Любушиным А.А. и утвержден на заседании кафедры математики ФГБОУ ВО "Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе" (МГРИ-РГГРУ) 25 января 2017 г. (протокол № 13).

Заведующий кафедрой математики
кандидат технических наук,
доцент
Качержук Сергей Сергеевич____________
E-mail:rggru.math@gmail.com

Профессор кафедры математики,
доктор физико-математических наук,
профессор
Любушин Алексей Александрович____________
E-mail:lyubushin@yandex.ru

Подписи С.С. Качержука и А.А. Любушина заверяю
директор департамента управления делами В.А. Фролов____________

Сведения о ведущей организации.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе» (МГРИ-РГГРУ)
Геофизический факультет
117997, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 23
Телефон: +7 (495)433-62-56
Сайт организации: http://mgri-rggru.ru
E-mail: office@mgri-rggru.ru